نظریهٔ زبان‌ها و خودکاره‌ها
خودکاره پشته‌ای

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

خودکاره پشته‌ای

Pushdown automata (PDA) خ‌پ

محدودیت خم جهت تشخیص زبان‌ها

خ‌پ جهت تشخیص دسته‌ای بزرگتر از زبان‌ها (زم‌ام)

شامل پشته

- ۱- چون خودکارهٔ متناهی نامعین با هر ورودی از حالتی به حالت دیگر می‌رود
- ۲- همچنین با ورودی جدید و حالت فعلی ممکن است به قرار دادن یا برداشتن از پشته منجر گردد

خ‌پ

- معین
- نامعین

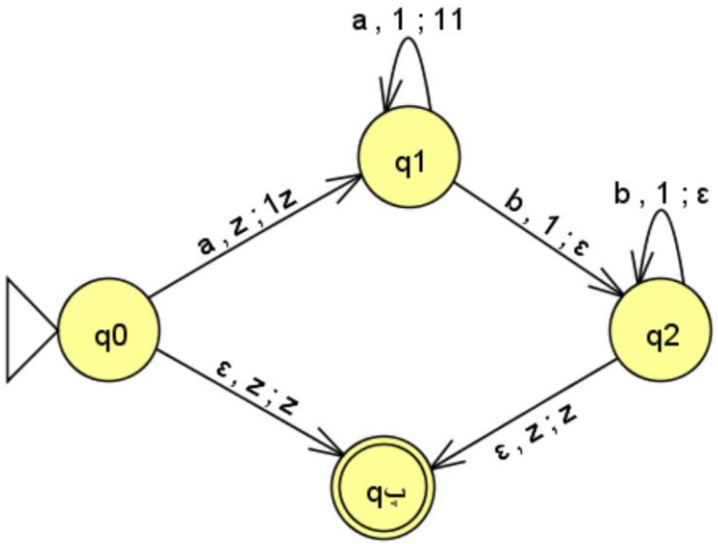
شهود

فرض قصد خواندن زبان $a^n b^n : n \geq 0$ را داریم

شمارش شیوه نیاکان

- به ازای aها علامتی جداگانه
- سپس هنگام رسیدن به b علامت‌ها را یکی یکی پاک می‌کنیم.
- با رسیدن به انتهای جمله هیچ علامت باقی نمانده باشد
- فعلا شمارشی و نه پشته‌ای

$a^n b^n : n \geq 0$



$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{پ}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{z, 1\}$

δ

$q_0 \in Q$

$z \in \Gamma$

$q_{پ}$ حالت پایانی

یادآوری خم

پنج‌تائی (Q,Σ,δ,q_0,F) است به‌طوری‌که

- Q مجموعه متناهی حالت‌ها
- Σ الفباء ورودی (متناهی)
- $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ تابع انتقال
  - با هر زوج حالت فعلی و ورودی فعلی، حالت جدید
- $q_0 \in Q$ حالت آغاز
- $F \sqsubseteq Q$ مجموعه حالت‌های پذیرش (نهائی)

$\delta(q_i,F)=q_j$

- دو ورودی
- تک خروجی

در خ‌پ

- بالای پشته نیز به عنوان ورودی اضافه می‌شود
- خروجی نیز دوتائی می‌شود و بالای پشته نیز بر حسب سه‌تائی ورودی (حالت، ورودی، بالای پشته) دستخوش تغییر می‌شود
- ته پشته (پشته خالی) را با علامت z نشان می‌دهیم. پس پشته علامتی دارد که لزوما در Σ نیست
  - توجیه الفبای ثانویه

خودکاره پشته‌ای نامعین (خ‌پ‌ن)

هفت‌تائی $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z,F)$ است به‌طوری‌که

- Q مجموعه متناهی حالت‌ها
- دو الفباء
  - Σ الفباء ورودی (متناهی)
  - Γ الفباء پشته (متناهی)
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$ تابع انتقال
  - با هر زوج حالت فعلی و ورودی فعلی، حالت جدید
- $q_0 \in Q$ حالت آغاز
- $z \in \Gamma$ نشان ته پشته
- $F \sqsubseteq Q$ مجموعه حالت‌های پذیرش (نهائی)

$$\delta(q_i, a, A) = (q_j, B)$$

دو خروجی

سه ورودی

q_i حالت فعلی خ‌پ، نوک خواندن روی a، A در بالای پشته

q_j حالت بعدی و Aاز پشته برداشته شود و B قرار گیرد

مثال

$\delta(q_i,a,0) = (q_j,1)$: قرار دادن ۱ به جای 0 روی پشته

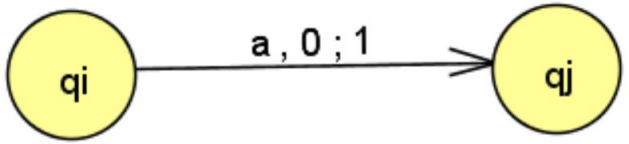
$\delta(q_i,a,0) = (q_j,10)$: قرار دادن ۱

$\delta(q_i,a,0) = (q_j,\epsilon)$: برداشتن مقدار 0

مثال

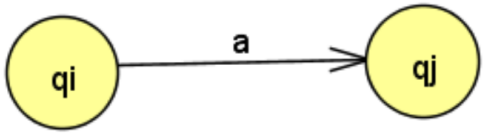
$$\delta(q_i,a,0) = \{(q_j,1),(q_l,\epsilon)\}$$

گراف انتقال به ازای $\delta(q_i,a,0) = (q_j,1)$



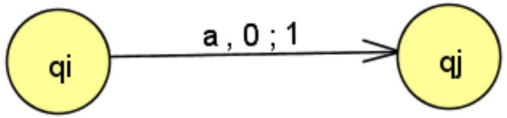
(Q,Σ,δ,q_0,F) خم

$\delta(q_i, a) = (q_j)$

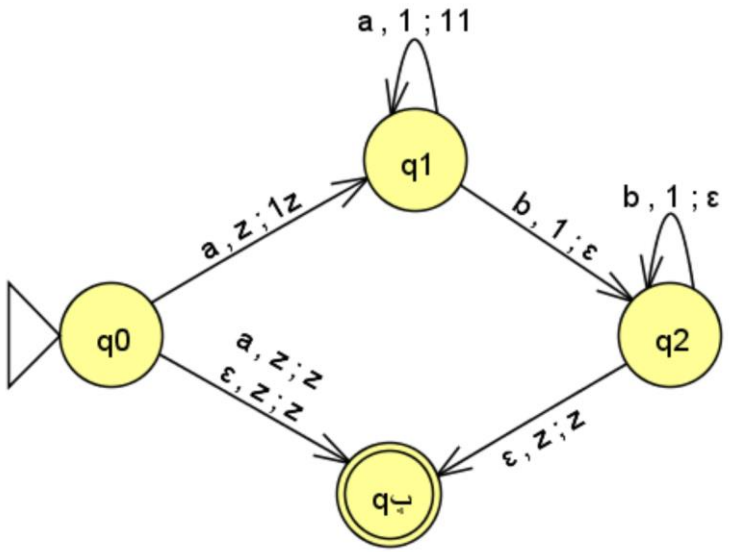


$(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z,F)$ خپ

$\delta(q_i, a, 0) = (q_j, 1)$



$\{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a\}$



$\{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a\}$

$\delta(q_0, \epsilon, z) = (q_{\text{پ}}, z)$

$\delta(q_0, a, z) = (q_{\text{پ}}, z)$

$\delta(q_0, a, z) = (q_1, 1z)$

$\delta(q_1, a, 1) = (q_1, 11)$

$\delta(q_1, b, 1) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_2, b, 1) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_2, \epsilon, z) = (q_{\text{پ}}, z)$

$\delta(q_0, \epsilon, z) = (q_{\text{پ}}, z)$

$\delta(q_0, a, z) = (q_{\text{پ}}, z)$

$\delta(q_0, a, z) = (q_1, 1z)$

$\delta(q_1, a, 1) = (q_1, 11)$

$\delta(q_1, b, 1) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_2, b, 1) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_2, \epsilon, z) = (q_{\text{پ}}, z)$

خودکاره پشته‌ای نامعین

$L = \{w \in \{a,b\}^*: \#_a(w) = \#_b(w)\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{z, 0,1\}$

$\delta(q_0, a, z) = (q_0, 0z)$

$\delta(q_0, b, z) = (q_0, 1z)$

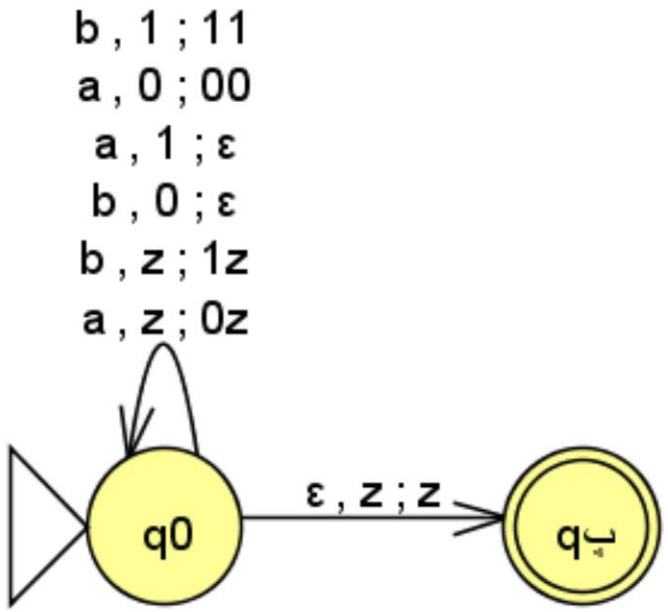
$\delta(q_0, a, 1) = (q_0, \epsilon)$

$\delta(q_0, b, 0) = (q_0, \epsilon)$

$\delta(q_0, a, 0) = (q_0, 00)$

$\delta(q_0, b, 1) = (q_0, 11)$

$\delta(q_0, \epsilon, z) = (q_{پ}, z)$



$$\delta(q_0, baab, z) \vdash \delta(q_0, aab, 1z) \vdash \delta(q_0, ab, z) \vdash \delta(q_0, b, 0z) \vdash \delta(q_0, \epsilon, z) \vdash \delta\left(q_{پ}, \epsilon, z\right)$$

خودکاره پشته‌ای نامعین

$L = \{w \in \{a,b\}^*: \#_a(w) = \#_b(w)\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{z, 0,1\}$

$\delta(q_0, a, z) = (q_0, 0z)$

$\delta(q_0, b, z) = (q_0, 1z)$

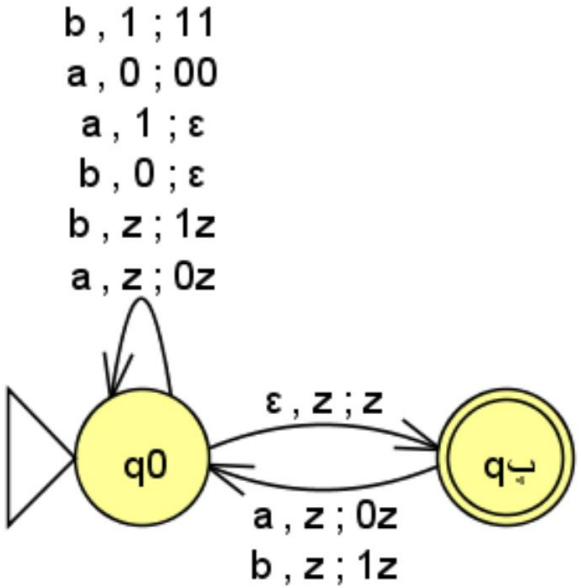
$\delta(q_0, a, 1) = (q_0, \epsilon)$

$\delta(q_0, b, 0) = (q_0, \epsilon)$

$\delta(q_0, a, 0) = (q_0, 00)$

$\delta(q_0, b, 1) = (q_0, 11)$

$\delta(q_0, \epsilon, z) = (q_{پ}, z)$

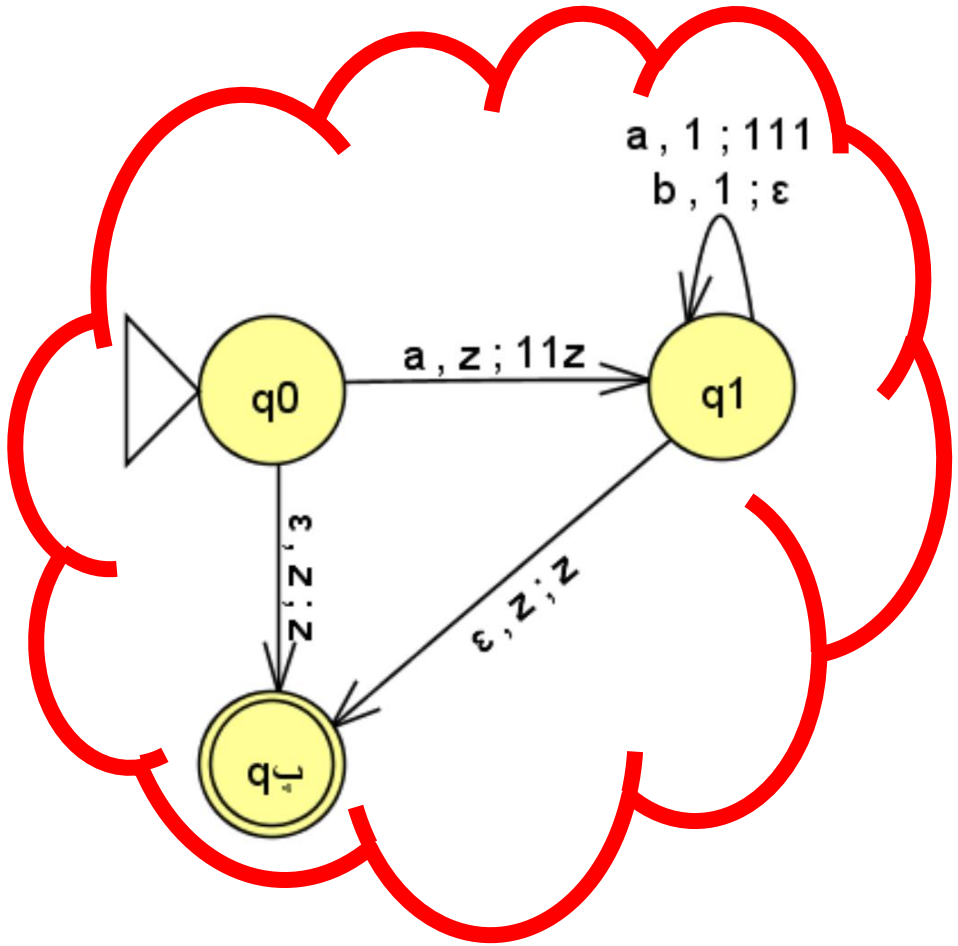


$$\delta(q_0, baab, z) \vdash \delta(q_0, aab, 1z) \vdash \delta(q_0, ab, z) \vdash \delta(q_0, b, 0z) \vdash \delta(q_0, \epsilon, z) \vdash \delta\left(q_{پ}, \epsilon, z\right)$$

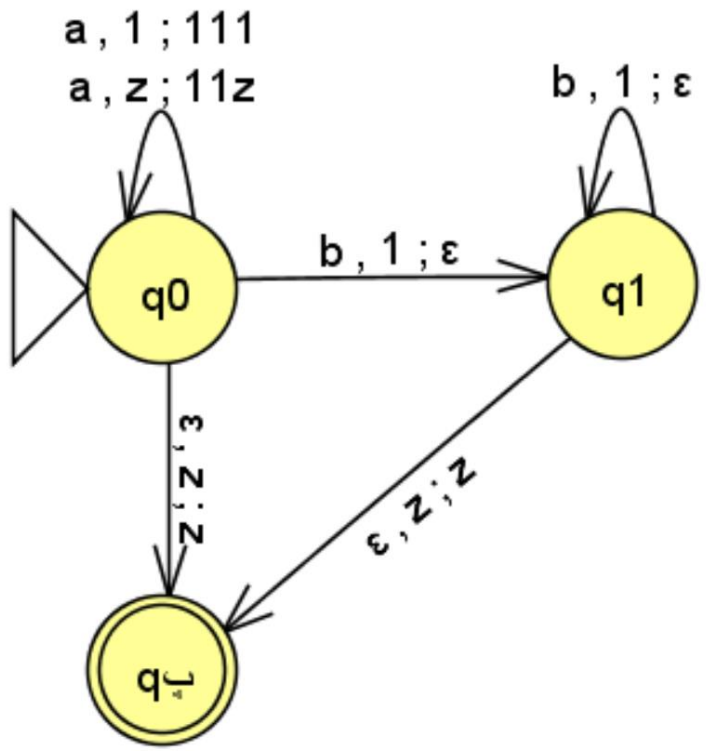
تعریف

زبان موردپذیرش خ‌پ‌ن، مجموعهٔ تمام رشته‌هائی است که حداقل یکی از پیکربندی‌های خ‌پ‌ن با رسیدن به انتهای رشته در یکی از حالت‌های پایانی قرار داشته باشد.

$$\{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$$



غلط



$$\{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$$

$$\delta(q_0, a, z) = (q_0, 11z)$$

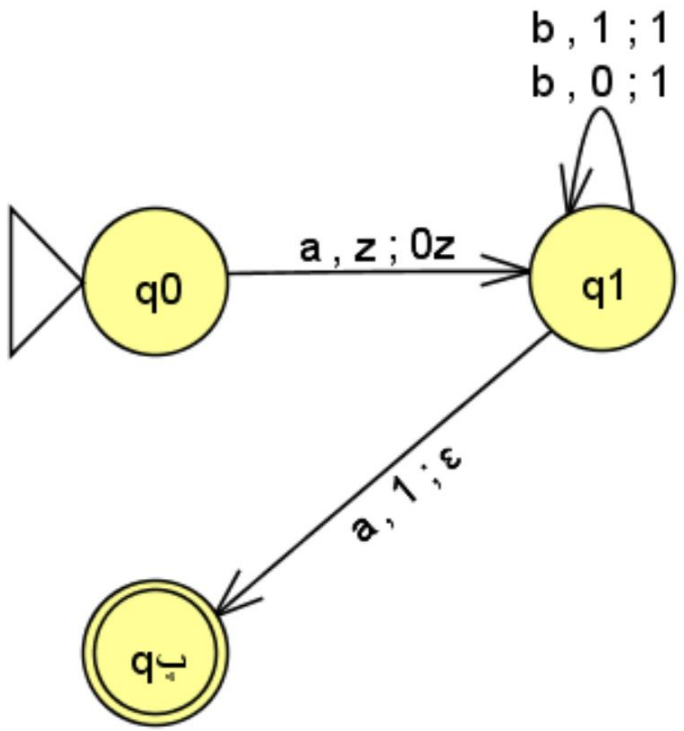
$$\delta(q_0, a, 1) = (q_0, 111)$$

$$\delta(q_0, b, 1) = (q_1, \epsilon)$$

$$\delta(q_1, b, 1) = (q_1, \epsilon)$$

$$\delta(q_1, \epsilon, z) = (q_{پ}, z)$$

$\{ab^+a\}$



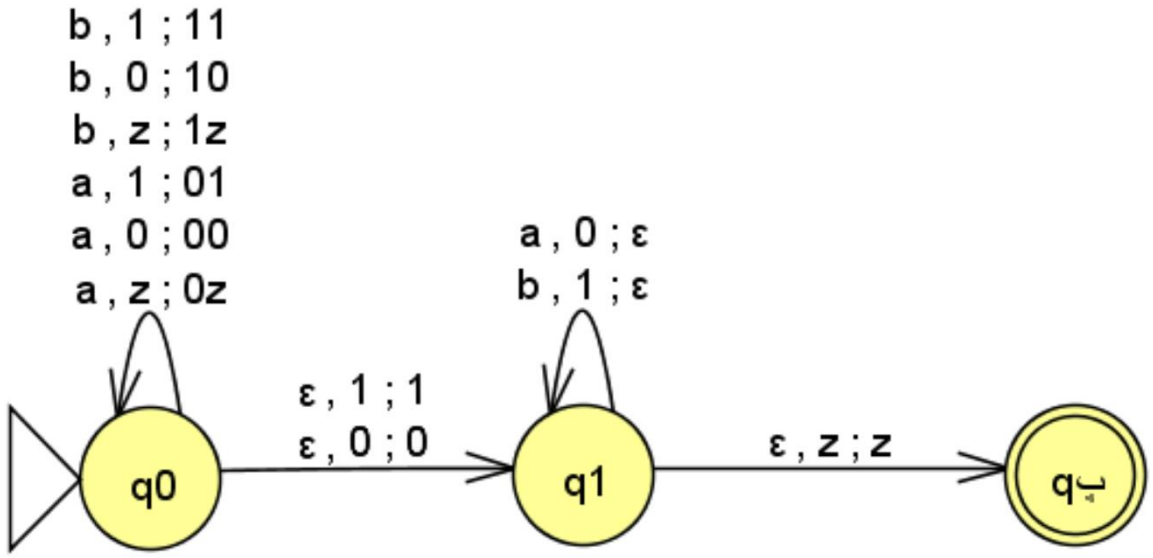
$$\delta(q_0, a, z) = (q_1, 0z)$$

$$\delta(q_1, b, 0) = (q_0, 1)$$

$$\delta(q_1, b, 1) = (q_1, 1)$$

$$\delta(q_1, a, 1) = (q_{پ}, \epsilon)$$

$\{w^R w\}$



$$\delta(q_0, abba, z) \vdash \delta(q_0, bba, 0z) \vdash \delta(q_0, ba, 10z) \vdash \delta(q_1, ba, 10z) \vdash \delta(q_1, a, 0z) \vdash \delta(q_1, \epsilon, z) \vdash \delta\left(q_{\text{پ}}, \epsilon, z\right)$$

خودکاره پشته‌ای معین (خ‌پ‌م)

$(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z,F)$

خ‌پ معین است اگر به ازای $q \in Q$ و $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ و $b \in \Gamma$ دارای محدودیت‌های زیر باشد:

۱- $\delta(q,a,b)$ حداکثر یک عضو دارد

۲- اگر $\delta(q,\epsilon,b)$ تهی نباشد، آن‌گاه $\delta(q,c,b)$ به ازای هر $c \in \Sigma$ تهی است

توجه به تفاوت تعریف «خ‌م‌م» و «خ‌پ‌م»

- مستلزم اینکه به ازای هر حرف ورودی و هر مقدار بالای پشته حداکثر یک حرکت قابل انجام است
- چنانچه در یکی از پیربندی‌ها به انتقال تهی برسیم، آن‌گاه هیچ حرکتی جهت جلو بردن و مصرف ورودی ممکن است.

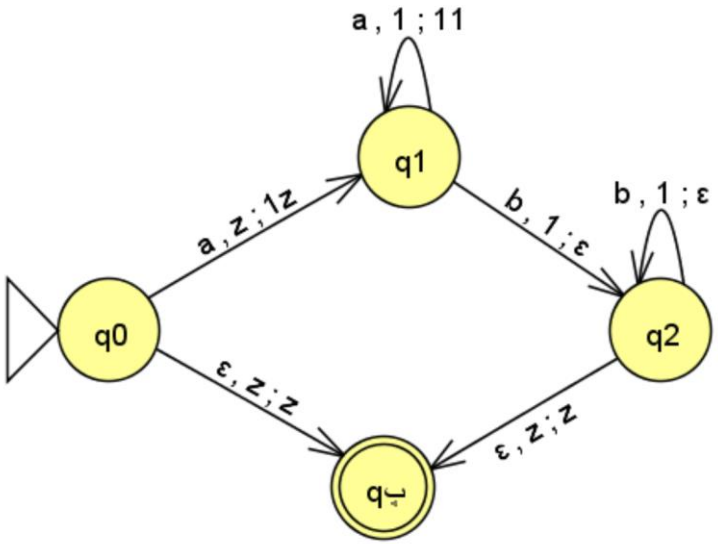
مثال $\delta(q,\epsilon,z) = (q,z)$ دیگر مجاز به انتقالی شبیه $\delta(q,a,z) = (q,z)$ نیستیم

ملاک معین: در همه حال حداکثر یک حرکت انجام‌پذیر است.

تعریف زبان مستقل از متن معین

- زبان مام معین است اگر و فقط یک خ‌پ‌م آن را نمایش دهد.

$a^n b^n : n \geq 0$



$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{پ}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{z, 1\}$

δ

$q_0 \in Q$

$z \in \Gamma$

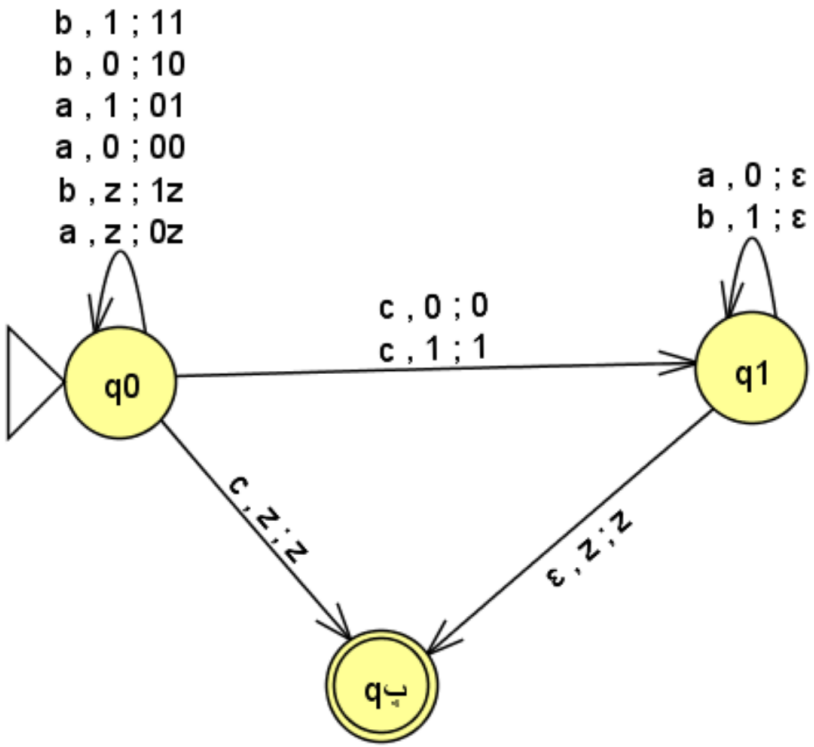
$q_{پ}$ حالت پایانی

مثال

$\{w \in \{a,b\}^* : \#_a(w) = \#_b(w)\}$ معین است؟

مثال

$\{w \in \{a,b\}^* : w^R cw\}$ معین است؟



مثال

$\{w \in \{a,b\}^* : w^R w\}$ معین است؟

خیر

چون وسط رشته با آزمایش و خطا حدس زده می‌شود و شروط را رعایت نمی‌کند.

مثال

$\{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$ معین است؟

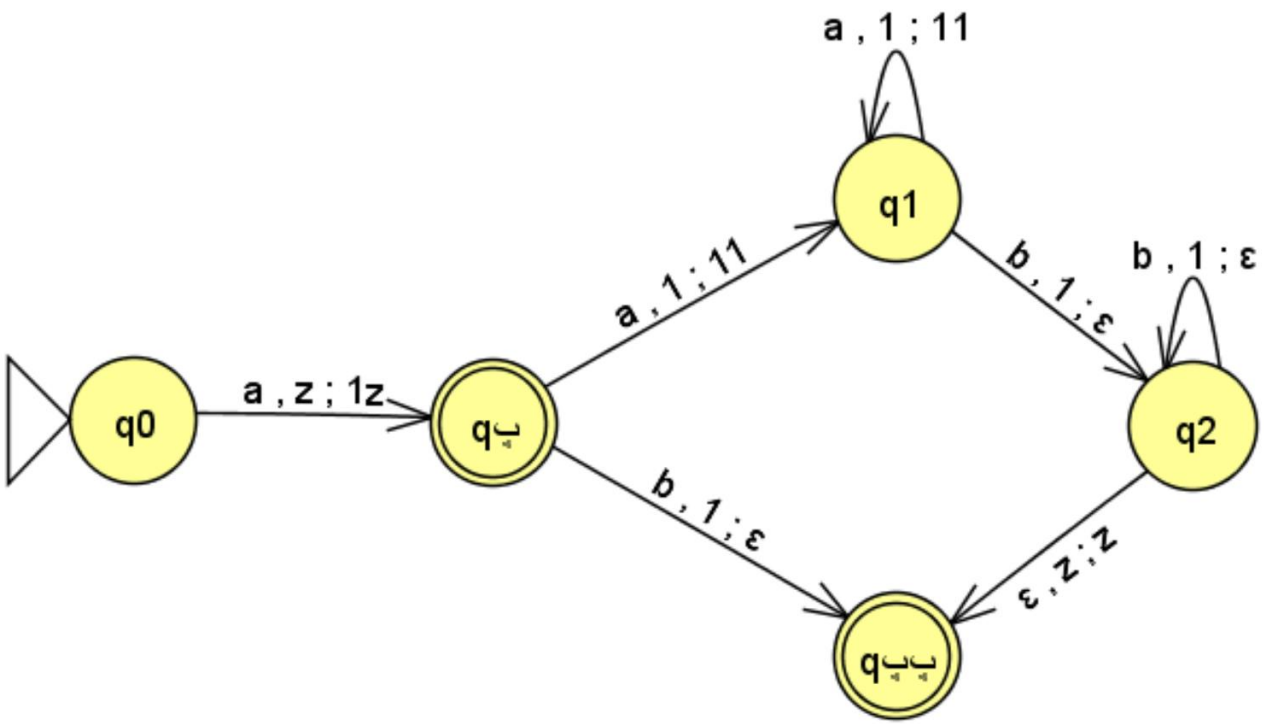
خیر

چون با یک یا دو b با هر a منطبق باشد.

اطلاعات موجود در ابتدای رشته چنان نیست که بتوان یک انتخاب را قطعی کرد.

مثال

$\{a^n b^n : n \geq 1\} \cup \{a\}$ معین است؟



چند ویژگی

زبان مام معین،ذاتا مبهم نیست

همه زبان‌های منظم، زمام معین هستند.

اهمیت زبان‌های مستقل از متن معین

دستور ساده

دستور چپ چپ (چچ)

- LL
- چچ(k)

«زم‌ام» و «خ‌پ‌ن»

مدل شدن بعضی از زبان‌های مستقل از متن با خ‌پ‌ن

- اتفاقی؟
  - خیر
  - معادل بودن زم‌ام با خ‌پ‌ن

زیبایی معادل بودن دو شکل و صورت متفاوت

مثال

خپ جهت دستور $S \to aSbb|a$

تبدیل به صورت نرمال گریباک

$S \to aSA|a$
$A \to bB$
$B \to b$

خودکاره متناظر دارای سه وضعیت $\{q_{\text{پ}}, q_{\text{ح}}, q_{\text{ش}}\}$

۱- قرار دادن علامت آغاز S در پشته با $\delta\left(q_{\text{ش}}, \epsilon, z\right) = \{(q_{\text{ح}}, Sz)\}$

۲- الف) با خواندن a، حذف S از پشته و جانشینی آن با SA، جهت شبیه‌سازی $S \to aSA$

۲- ب) هم‌چنین با خواندن a، حذف S از پشته و جانشینی آن با ϵ، جهت شبیه‌سازی $S \to a$

پس $\delta\left(q_{\text{ح}}, a, S\right) = \{\left(q_{\text{ح}}, SA\right), \left(q_{\text{ح}}, \epsilon\right)\}$

مثال-ادامه

خ‌پ جهت دستور $S \rightarrow aSbb|a$

تبدیل به صورت نرمال گریباک

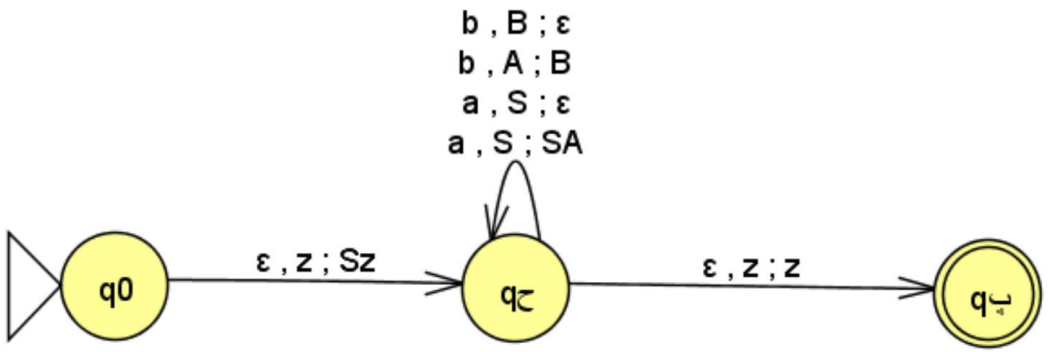
$S \rightarrow aSA|a$
$A \rightarrow bB$
$B \rightarrow b$

خودکاره متناظر دارای سه وضعیت $\{q_{ش}, q_{ح}, q_{پ}\}$

۳- $\delta\left(q_{ح}, b, A\right) = \{\left(q_{ح}, B\right)\}$

۴- $\delta\left(q_{ح}, b, B\right) = \{\left(q_{ح}, \epsilon\right)\}$

۵- $\delta\left(q_{ح}, \epsilon, z\right) = \{\left(q_{پ}, z\right)\}$



مثال

$$S \to aA$$
$$A \to aABC|bB|a$$
$$B \to b$$
$$C \to c$$

$$\delta\left(q_{ش}, \epsilon, z\right) = \left\{\left(q_{ح}, Sz\right)\right\}$$
$$\delta\left(q_{ح}, a, S\right) = \left\{\left(q_{ح}, A\right)\right\}$$
$$\delta\left(q_{ح}, a, A\right) = \left\{\left(q_{ح}, ABC\right), \left(q_{ح}, \epsilon\right)\right\}$$
$$\delta\left(q_{ح}, b, B\right) = \left\{\left(q_{ح}, \epsilon\right)\right\}$$
$$\delta\left(q_{ح}, c, C\right) = \left\{\left(q_{ح}, \epsilon\right)\right\}$$
$$\delta\left(q_{ح}, \epsilon, z\right) = \left\{\left(q_{پ}, z\right)\right\}$$

مثال aaabc

$$\left(q_{ش}, aaabc, z\right) \Rightarrow \left(q_{ح}, aaabc, Sz\right) \Rightarrow \left(q_{ح}, aabc, Az\right) \Rightarrow \left(q_{ح}, abc, ABCz\right)$$
$$\Rightarrow \left(q_{ح}, bc, BCz\right) \Rightarrow \left(q_{ح}, c, Cz\right) \Rightarrow \left(q_{ح}, \epsilon, z\right) \Rightarrow \left(q_{پ}, \epsilon, z\right)$$

قضیه

هر زبانی مستقل از متن است اگر دارای خ‌پ‌ن باشد.

(V,Σ,S,R)

- فرض به صورت گریباک
- شبیه مثال خ‌پ‌ن

$(\{q_{ش},q_{ح},q_{پ}\},\Sigma,V \cup \{z\},\delta,q_{ش},z,\{q_{پ}\})$

$\delta\left(q_{ش},\epsilon,z\right) = \left\{\left(q_{ح},Sz\right)\right\}$ از شروع

$\delta\left(q_{ح},\epsilon,z\right) = \left\{\left(q_{پ},z\right)\right\}$ به حالت نهائی

$\left(q_{ح},u\right) \in \delta\left(q_{ح},a,A\right)$ هرگاه $A \rightarrow au$

قضیه

$(\{q_{\text{ش}},q_{\text{ح}},q_{\text{پ}}\},\Sigma,V \cup \{z\},\delta,q_{\text{ش}},z,\{q_{\text{پ}}\})$

$\delta\left(q_{\text{ش}},\epsilon,z\right) = \left\{\left(q_{\text{ح}},Sz\right)\right\}$ از شروع

$\delta\left(q_{\text{ح}},\epsilon,z\right) = \left\{\left(q_{\text{پ}},z\right)\right\}$ به حالت نهائی

$\left(q_{\text{ح}},u\right) \in \delta\left(q_{\text{ح}},a,A\right)$ هرگاه $\mathrm{A} \to au$

$$S \overset{*}{\Rightarrow} a_1a_2 \dots a_nA_1A_2 \dots A_m \Longrightarrow a_1a_2 \dots a_nbB_1B_2 \dots B_kA_2 \dots A_m$$

پس از خواندن $a_1a_2 \dots a_n$ پشته حاوی $A_1A_2 \dots A_m$

انجام اشتقاق بعدی $A_1 \to bB_1B_2 \dots B_k$: $\left(q_{\text{ح}},B_1B_2 \dots B_k\right) \in \delta\left(q_{\text{ح}},b,A\right)$

پس $a_1a_2 \dots a_nb$ پشته حاوی $B_1B_2 \dots B_kA_2 \dots A_m$

اگر $S \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{w}$ آن‌گاه $\delta\left(q_{ح},w,Sz\right) \overset{*}{\Rightarrow} \delta\left(q_{ح},\epsilon,z\right)$

حال افزودن شروع و پایان

$$\delta\left(q_{ش},\epsilon,z\right) \Rightarrow \left(q_{ح},w,Sz\right) \overset{*}{\Rightarrow} \delta\left(q_{ح},\epsilon,z\right) \Rightarrow \delta\left(q_{پ},\epsilon,z\right)$$

بنابراین $L(G) \subseteq L(M)$

$$w \in L(M)$$

$$\delta\left(q_{\text{ش}}, \epsilon, z\right) \overset{*}{\Rightarrow} \delta\left(q_{\text{پ}}, \epsilon, z\right)$$

صرفا یک راه از شروع به ح $\delta\left(q_{\text{ش}}, \epsilon, z\right) \Rightarrow \left(q_{\text{ح}}, w, Sz\right)$

$$\left(q_{\text{ح}}, w, Sz\right) \overset{*}{\Rightarrow} \delta\left(q_{\text{ح}}, \epsilon, z\right)$$

$$\left(q_{\text{ح}}, a_1 a_2 \dots a_n, Sz\right) \overset{*}{\Rightarrow} \delta\left(q_{\text{ح}}, \epsilon, z\right)$$

$$\left(q_{\text{ح}}, a_1 a_2 \dots a_n, Sz\right) \Longrightarrow \left(q_{\text{ح}}, a_2 \dots a_n, U_1 Sz\right)$$

$$\left(q_{\text{ح}}, a_2 \dots a_n, U_1 Sz\right) \Longrightarrow \left(q_{\text{ح}}, a_3 \dots a_n, U_2 Sz\right)$$

قضیه

زبان خ‌پ‌ن، یک زبان مستقل از متن است.

عکس قضیه قبل

محتوای پشته باید در متغیرها لحاظ شود.

فرضیات ساده‌سازی صرفا یک حالت نهائی پq

خالی شدن پشتهٔ قبل پذیرش

در هر مرحله یک قرار دادن در پشته یا یک برداشتن از پشته

اثبات

$V = \{A_{pq} | p, q \in Q\}$

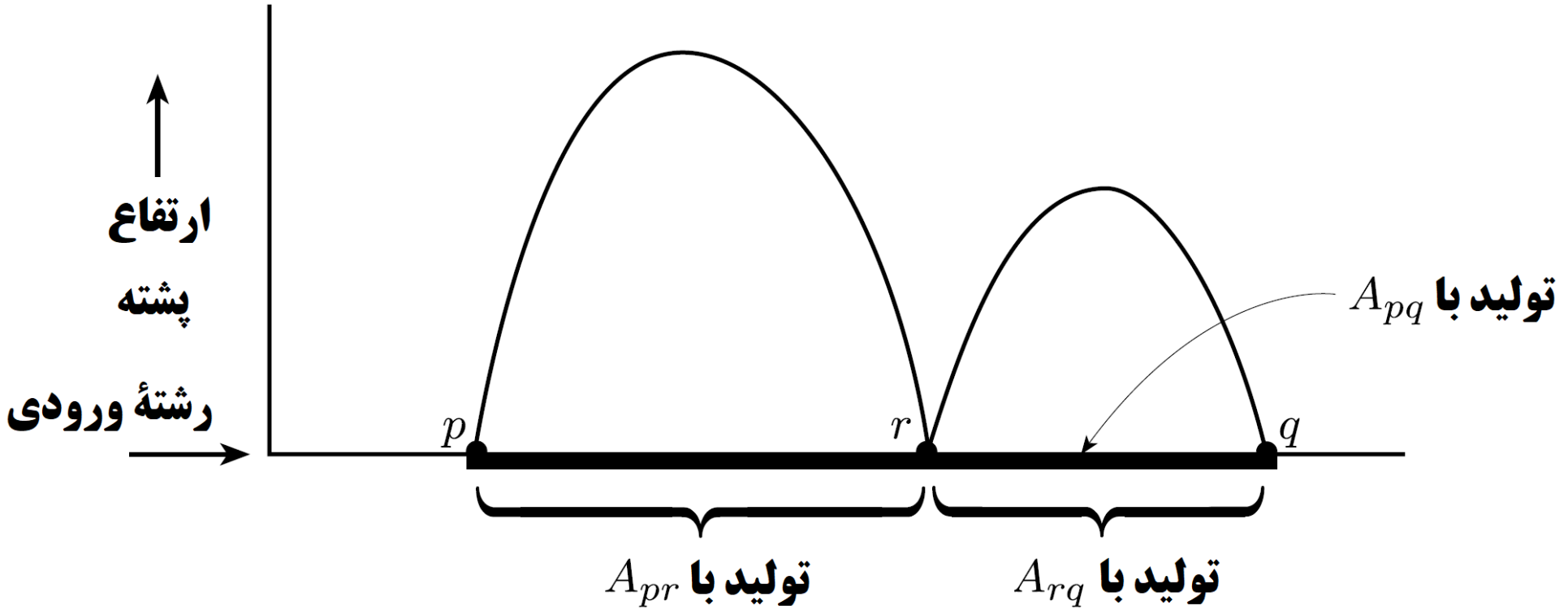
متغیر آغاز $A_{q_0 q}$ پ

الف- $p,q,r,s \in Q$ و $u \in \Gamma$ و $a,b \in \Sigma_\epsilon$، اگر $(r,u) \in \delta(p,a,\epsilon)$ و $(q,\epsilon) \in \delta(s,b,u)$، آن‌گاه افزودن قانون $A_{pq} \to aA_{rs}b$ به دستور

ب- $\forall p,q,r \in Q$ افزودن قانون $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$ به دستور

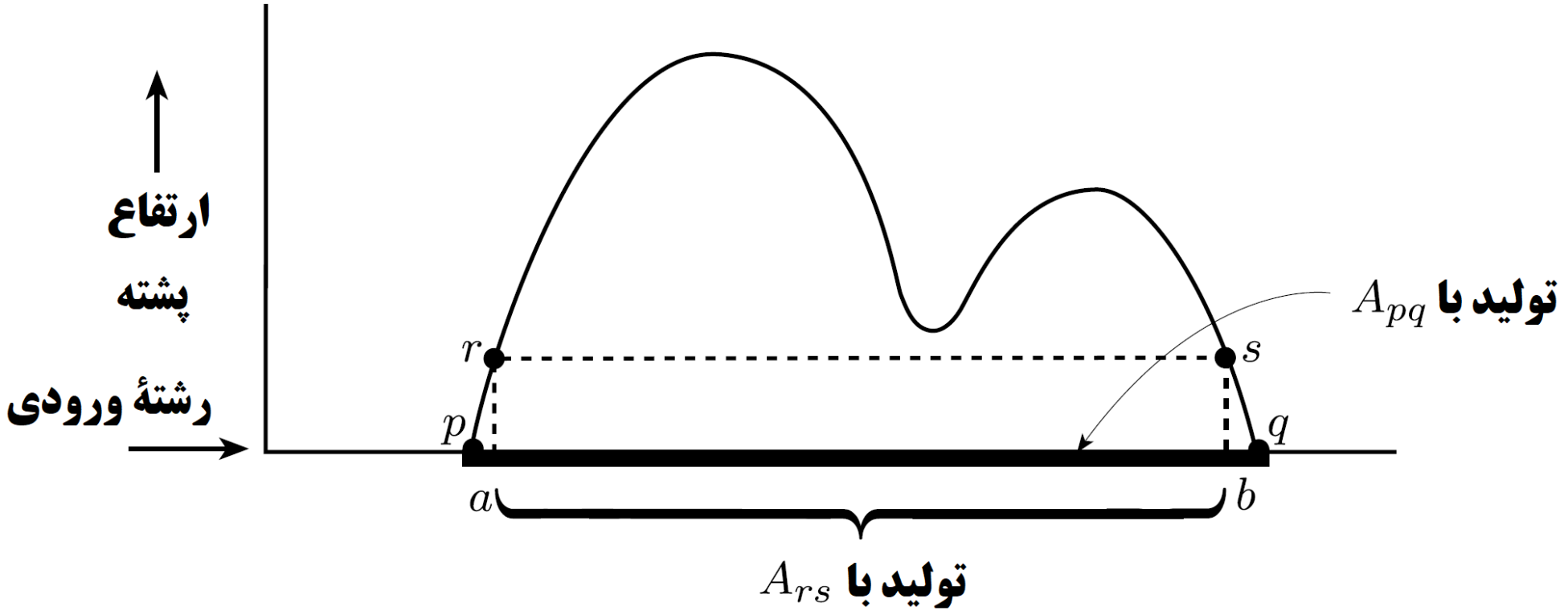
ج- $\forall p \in Q$ افزودن قانون $A_{pp} \to \epsilon$ به دستور

اثبات



$A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$

اثبات



$A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$

ادعای ۱

اگر A_{pq} رشته w را تولید کند، آن‌گاه w می‌تواند خ‌پ‌ن را از حالت p با پشتهٔ خالی به حالت q با پشته خالی خواهد رساند

پایه- اشتقاق یک مرحله دارد

- نیاز به قاعده تولیدی که در سمت راست متغیری نداشته باشد
- صرفا یک قانون $A_{pp} \rightarrow \epsilon$

استقرا برای k مرحله درست آست،حال برای k+1

- فرض $A_{pq} \overset{*}{\Rightarrow} w$ و $|w| = \mathrm{k} + 1$
  - $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$ یا $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$
  - $w = avb : A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$
  - $w = v\mathrm{u} : A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$

ادعای ۲

اگر رشتهٔ w خ‌پ‌ن را از حالت p با پشتهٔ خالی به حالت q با پشته خالی برساند، آن‌گاه A_{pq} رشتهٔ w را تولید خواهد کرد

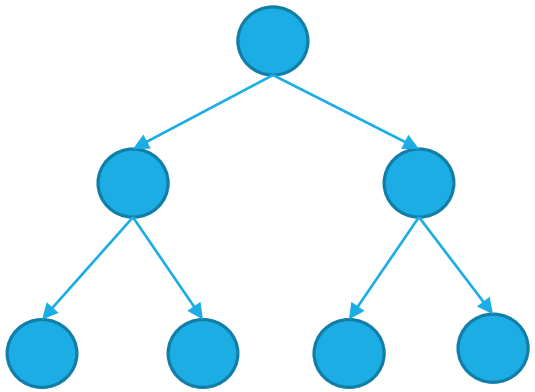
پایه- اشتقاق یک مرحله دارد

استقرا برای k مرحله درست آست، حال برای k+1

ربط زبان منظم و زبان مستقل از متن

هر زبان منظم، مستقل از متن است.

هر زبان منظم با خم شناخته می‌شود و هر خم، خ‌پ است که از پشته استفاده نمی‌کند.



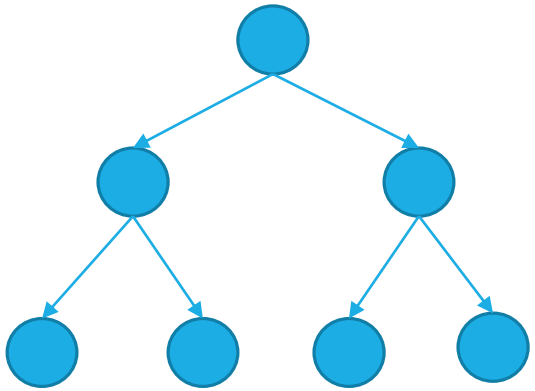
G صورت چامسکی دستور زبان مستقل از متن است.

فرض می‌کنیم G دارای m متغیر است $|V| = m$

فرض $n = 2^m$ و $|z| \geq n$ و $z \in L$

رسم درخت اشتقاق

- دو متغیر و جمله با طول چهار



G صورت چامسکی دستور زبان مستقل از متن است.

فرض می‌کنیم G دارای m متغیر است $|V| = m$

فرض $n = 2^m$ و $|z| \geq n$ و $z \in L$

رسم درخت اشتقاق

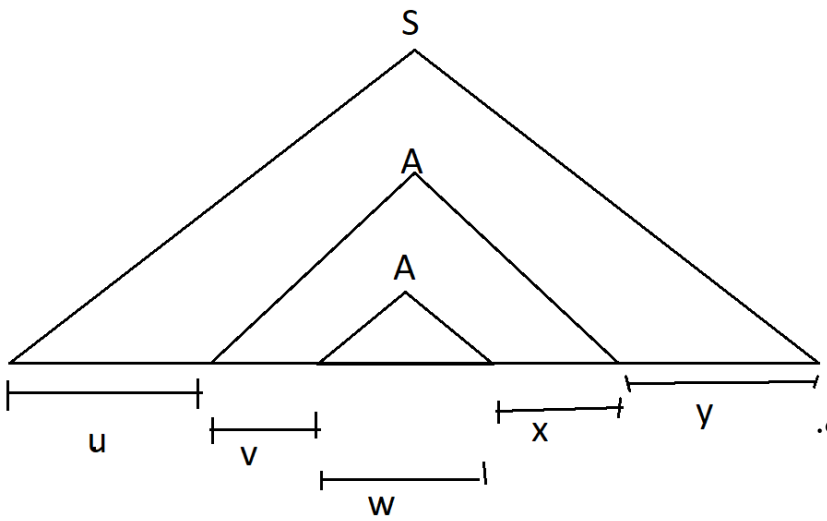
- یافتن طولانی‌ترین مسیر در درخت
  - حداقل m+1

G صورت چامسکی دستور زبان مستقل از متن است.

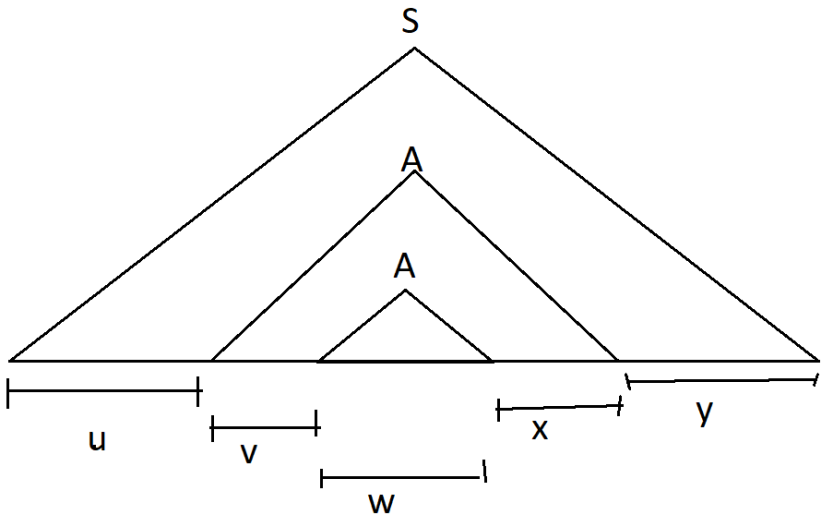
فرض می‌کنیم G دارای m متغیر است $|V| = m$

فرض $n = 2^m$ و $|z| \geq n$ و $z \in L$

رسم درخت اشتقاق



- یافتن طولانی‌ترین مسیر در درخت
  - حداقل m+1
- پیمایش از انتهای مسیر طولانی تا زمانی که به متغیری برسیم که قبلا در مسیر بوده است.
  - این اتفاق رخ می‌دهد؟ حتما
  - بنابر اصل لانه کبوتری



$S \overset{*}{\Rightarrow} uvwxy$

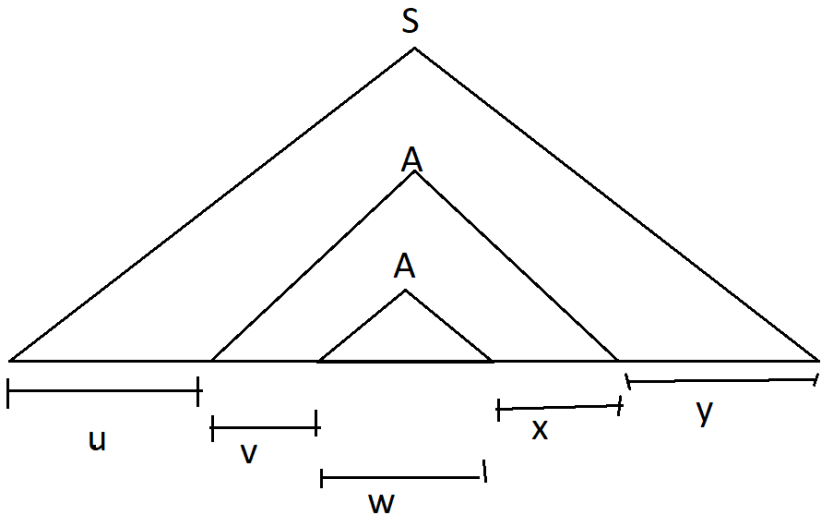
$A \overset{*}{\Rightarrow} w$

$A \overset{*}{\Rightarrow} vwx$

$|vx| = 0 \Longrightarrow A \overset{*}{\Rightarrow} A$ خلاف صورت چامسکی

$|vx| \geq 1$

طول $\leq m + 1 \Longrightarrow 2^{m+1-1} = 2^m = n \Longrightarrow |vwx| \leq n$



$$uvwxy \in L$$

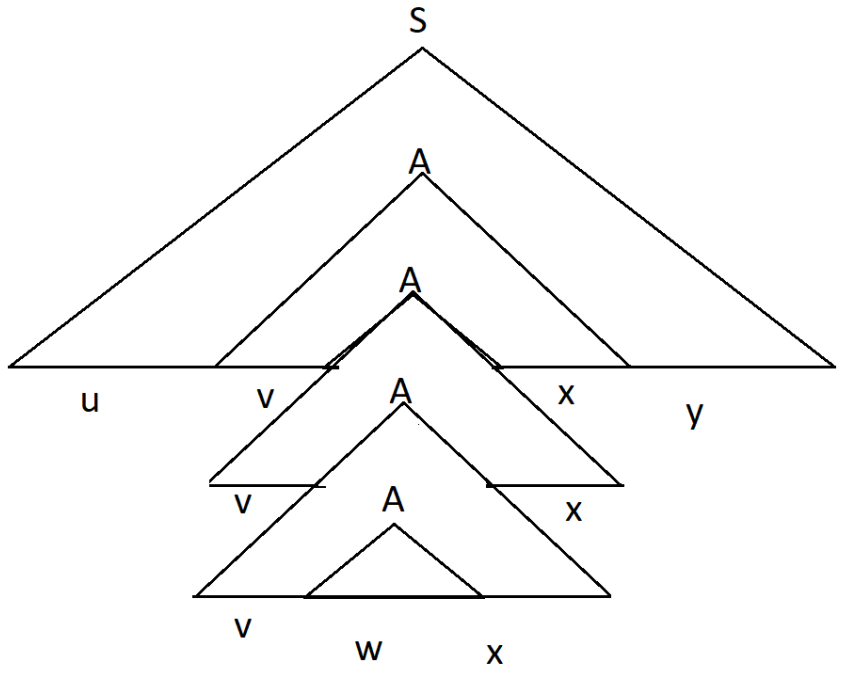
$$uv^2wx^2y \in L$$

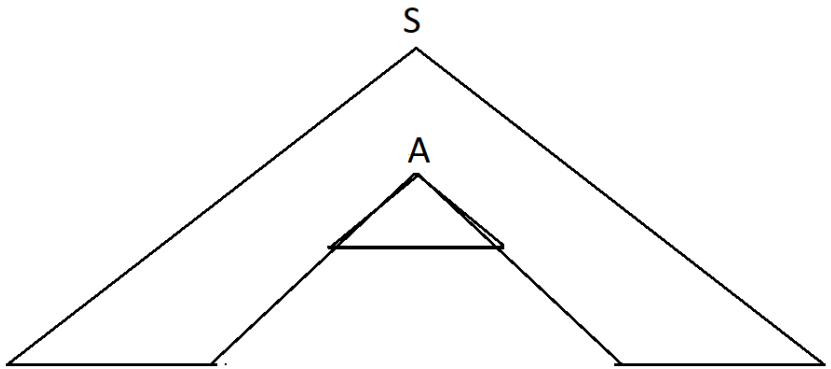
$$uv^3wx^3y \in L$$

$$\vdots$$

$$uv^iwx^iy \in L$$

$$uv^0wx^0y \in L$$





لم تزریق مام

L زمام است. آن‌گاه عدد ثابت n صرفا وابسته به L وجود دارد که تمامی رشته‌های z در L و $|z| \geq n$ از زیررشته‌های $uvwxy$ تشکیل شده‌اند به‌طوری‌که

الف $z = uvwxy$

ب $|vx| \geq 1, |vwx| \leq n$

ج $\forall i, i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

مثال $a^n b^n c^n, n \geq 0$

مثال

$ww, w \in \{a, b\}^*$

$ww^R w, w \in \{a, b\}^*$

$a^n b^m c^k, k = mn$

$a^n b^n c^m, n \neq m$

$a^{n!}, n > 0$

شرط‌های لم تزریق برای زم‌ام بودن زبان لازم هستند ولی کافی نیستند. ممکن است زبانی این شرایط را داشته باشد ولی مستقل از متن نباشد

لم اگدن

لم تزریق زبان خطی

منابع

[سیپسر]

[اینز]

“